

# 数学における高等教育

## Higher Education in Mathematics

河添 健

慶應義塾大学総合政策学部教授

Takeshi Kawazoe

Professor, Faculty of Policy Management, Keio University

数学の高等教育について述べる。初等・中等教育の後が高等教育であり、よって大学や大学院などで教える数学ということになる。大学で教える数学教育といっても、大学自体の在り方が大きく様変わりしている。さらには後期中等教育、すなわち高校で行われている数学教育あたりからその目的が十分に達成されていない。このあたりから数学教育の全体が危機的な様相を呈している。この稿ではその現実を浮き彫りにするとともに新たな数学の高等教育の可能性について考えてみたい。

In this note we analyze higher education in mathematics, educational system for teaching mathematics at Japanese universities. Nowadays, Japanese universities have drastically changed and they have accepted more than 50 percent of high school students. However, they have difficulty in teaching mathematics. The system almost malfunction and things are coming to a crisis. We propose a new style and a new standard in teaching mathematics.

Keywords: 高等教育、数学教育、教育改革

## 1 数学高等教育の名著

実情の話をする前に数学の高等教育における名著を紹介する。名著とは、とその定義を云々しても仕方がない。要するにあの本のおかげで（高等）数学が分かったと多くの人を感じる本である。したがって数学が分からない人にはどうでもよい話であり、名著を取り上げたところで数学の高等教育が進むとは思えない。しかし名著の中には数学を理解することへの確固とした道筋があることは確かである。ここではスミルノフの「高等数学教程」〔1〕と高木貞治の「解析概論」〔2〕を紹介する。

### 1.1 スミルノフの高等教育教程

数学者、特に年配の数学者に数学高等教育の教科書を問えば、間違いなくこの本を思い浮かべる。1913年ごろからサンクトペテルブルグ（旧レニングラード）大学の数理物理学部の Vladimir I. Smirnov (Владимир Иванович Смирнов) (1887年 - 1974年) が書いた数学、物理数学、応用数学の教科書で全5巻からなる（第1巻は J. Tamarkin との共著）。当時のロシアで広く教科書として使われた。英訳は1964年に「A Course in Higher Mathematics」として出版され、和訳は1958年に



図1 スミルノフ「高等数学教程」



図2 高木貞治「解析概論」

共立出版より「スミルノフ高等数学教程全5巻」として出版されている。監修は彌永昌吉・福原満洲雄・河田敬義・三村征雄・菅原正夫・吉田耕作である。現在は分冊を整理して12巻として出版されており、その内容は

1. 函数関係と極限の理論・導関数の概念とその応用・積分の概念とその応用
2. 級数およびその近似計算への応用・多変数の函数他
3. 常微分方程式・線型微分方程式と微分方程式論補遺・重責分と線積分他
4. ベクトル解析と場の理論・微分幾何学の基礎・フーリエ級数他
5. 行列式と方程式系の解法・線型交換と二次形式・行列の標準形への簡約他
6. 函数論の基礎・留数の理論の応用・整函数と有理型函数他
7. 多変数の函数と行列の函数・数理論理学における特殊函数他
8. 積分方程式・変分法
9. 偏微分方程式の一般的理論
10. 境界値問題

11. スティルチェス積分・集合函数とルベーグ積分・一般積分の概念
12. 距離空間とノルム空間・ヒルベルト空間（有界作用素論・空間）

である。これぞ高等数学である。いまでも理・工学部の学生、研究者や技術者が必読して欲しい本である。ただし書き方はロシア流であり、良く言えば説明が丁寧であるが悪く言えば間延びする。数学の厳密さは後とし実用的な理解を優先している。12巻の内容は「微積分学」「級数論」「常微分方程式」「多変数関数論」「ベクトル解析」「場の理論」「微分幾何学」「フーリエ解析」「線形代数」「複素関数論」「特殊関数論」「積分方程式」「変分法」「偏微分方程式」「境界値問題」「測度論」「関数解析」などなどである。現在は分野ごとに多くの入門書が出版されているので、この12巻を教科書として使うことはあまりないと思う。しかし数学や物理数学を自習するには良い本である。

### 1.2 高木貞治の解析概論

この本も多くの数学者が名著として取り上げる。高木貞治（1875年－1960年）が書いた解析学の入

門書であり初版は1938年に岩波書店から出版されている。現在も版を重ねて軽装版・ソフトカバーが出版されている。各章は以下のようになっている。

- 第1章 基本的な概念
- 第2章 微分法
- 第3章 積分法
- 第4章 無限級数、一様収束
- 第5章 解析函数、とくに初等函数
- 第6章 Fourier 式展開
- 第7章 微分法の続き（陰伏函数）
- 第8章 積分法（多変数）
- 第9章 Lebesgue 積分
- 附録 (I) 無理数論
- 附録 (II) 二,三の特異な曲線

スミルノフの12巻にくらべると内容は解析学に限定されている。しかし十分に高等数学であり、これに「線形代数」や「微分方程式」を加えればよい。この本の特徴は公理系に基づく厳密な数学の記述である。したがってロシア流ではなく、定理の証明に重きが置かれている。スミルノフが物理数学や応用数学を意識したのは逆にこの本は数学本来の厳密さをきちんと取り上げている。したがってフーリエ級数、陰関数、多変数解析など応用上大事なことも厳密さにこだわる分だけに分かりにくい。このあたりが純粋数学者のこだわりである。

2冊を紹介したが、まだまだ名著はある。佐武一郎「線型代数学」(裳華房)、スピヴァック「多変数解析学」(東京図書)、クーラン・ヒルベルト「数理物理学の方法全4巻」(東京図書)、加藤敏夫・吉田耕作「応用数学I」(裳華房)、アールフォルス「複素解析」(現代数学社)などは名著と言わないと誰かに怒られそうである。ブルバキの「数学原論」も然りである。しかしこの稿の目的は数学の高等教育なのでそれらの紹介は割愛するが、いずれにせよこれらの名著は数学の高等教育を目指して書かれたものであり書かれた当時のスタンダードな高等数学である。

## 2 数学の高等教育が目指すもの

数学の高等教育、大学での数学教育は何を目指しているのだろうか？ ここは他の分野と大きく異なる点である。大学教育において、学部に限っても、例えば政治学や経済学であれば刻々と変化する社会への対応が必要であり、その現実を理解することが教育の1つの目標となる。そしてその理解が社会への貢献につながる。物理や化学でも変化する速さは異なるにせよ、新たな発見へ対する理解が教育の上で必須であり、その応用は社会へ貢献する。つまり多くの分野では最先端を理解することが高等教育の目的となる。ところが数学は奥が深すぎるのである。最先端は遠くの先にあり、新たな発見を理解できる人は多くない。場合によってはその分野の専門家でも苦勞する。当然のこと学部のレベルではその理解は無理である。たとえ理解したとしてもほとんど役に立たつことはない。すなわち、他の分野と異なり数学の高等教育は最先端の理解ではない（もちろん今は大学の数学教育の話をしているのであって数学科の話ではない）。学部で教えられる数学は100年ぐらい前からほぼ同じである。大学での数学を理解できたとしてもそれは100年前の数学であり、最先端ではない。しかしそれが最先端の数学への基礎であり、また現代社会の中で大いに役立っている。したがって数学の高等教育、大学での数学教育は何かと聞かれれば、一言でいえば他分野で数学が使われることへの手助けである。したがって学部レベルでは最先端の数学は必要なく、古典的な名著が今でも読まれ教科書として使えるのである。

名著は数学が分かった人がその価値を認めるものなので、名著を闇雲に教育の主とするのは暴論であろう。しかし前節で紹介した2つの名著は当時の数学を必要とする人々へその基礎と考え方を提供したことは間違いない。ここで気付くべきことは2つの名著に共通する教授内容と異なる教授方法である。

数学の高等教育で何を教えるべきか？ 教授内容に対する答えは比較的共通すると思われる。他の分野において数学を使うことへの手助けとしては、スミルノフの本でいえば最初の4～5巻、高木貞治の本でいえば8章までに「線形代数」と「微分方程式」

を加えることとなる。もちろん、将来に数学を必要とすることであろう理・工学部の大学生を対象とする教育を念頭に置いている。しかし文系学部で学生でも数学を道具として使いたい場合にはそれらの学生も対象に含まれる。

問題はその教授方法である。スミルノフの本では数学の厳密さよりも、内容の理解に重きを置き、高木貞治の本では数学の厳密さの理解に重きを置いている。これらを教科書あるいは参考書として見たとき、工科系の学生へは前者を、理科系の学生へは後者を薦めることになる。しかしこれはあくまで一般論である。教育の使命は理解すること、すなわち「分かる」ことを体験させることである。何をもち「分かる」とするかは、大学や学部の理念である。したがって学生の属性によりその教授方法は大きく異なることになる。

大学での数学教育は、大学や学部の理念と大きく関わる。学生の属性を顧みずに行えば、数学嫌いを増やし、あるいは逆に数学を使いたい学生の不満を増すことになる。まずは大学や学部はその理念に基づき数学教育をいかに位置づけるかを明確にすべきである。この段階で数学の教授内容や教授方法が確立する。このとき教授内容を定めることについては迷いが少ないが、どのような理解を求めるかについての教授方法については議論が必要であろう。つぎにそれに合った学生を大学入試で集めればよい。ところが現実にはこの順序が不確かである。まずは学生を集めて、そのつぎに数学教育となる。後期中等教育、すなわち高校の数学教育の現状から、大学の入試科目に数学を入れると受験生が大幅に減る。よって大学は入試に数学科目を課すことなく学生を受け入れる。そして入学した学生を見てからの数学教育となる。これではモチベーションは上がらず、数学嫌いを増やすための数学教育となる。

### 3 大学の変化と現状

数学の高等教育、すなわち大学での数学教育を足早に振り返ったが、以上は教える側からの話であり理想論に近い。現実には少し古い話となり、通用しなくなっている。一言でいえば、現在の多くの大学

生はスミルノフや高木貞治の名著を読めないのである。それは少数のエリートを対象としていた大学が崩れたことによる。1990年ごろの大学進学率は25%であったが、2009年には50%を越えほぼ倍増した。いわゆる「大学全入時代」が近づいている。当然ながらこの現象はエリートが倍増した訳ではなく、もっとも大きな要因は20歳前後の人口減少である。実際、大学生の数はあまり変化していない(図3参照)。

この結果として学生の学力幅が拡大し、大学への進学目的も多様化した。このような状況下で前節の最後に述べたような数学科目を外した大学入試を実施すれば、火に油を注ぐようなもので、数学の高等教育は困難を極めている。エリートは高望みとしても、少なくともモチベーションを持った学生は欲しい。しかし現実にはモチベーションの低い学生が多く、場合によっては彼らが多数派となっている。このことは数学に限ったことではない。

大学のこの現状は、2節で述べた数学教育の目指すものがすでに現実とかけ離れていることを意味している。抜本的な改革には後期中等教育や大学の入試改革が必要である。大学生の学力幅が拡大し、大学への進学目的も多様化した中で大学は何を教育すべきか？ この現状は既に予見されてきたことであり、文部科学省でも十分に審議されている ([7] 参照)。数学教育に限って考えても前節のように教授内容と教授方法を一方向から考察するだけでは明らかに不十分であり、大学生の実情を考慮した双方向の理解が必要である。また単に役立つ数学を教えるだけでよいかということそれも不十分であり、数学教育も社会を先導する指導者を養成することを求められているのである。エリートを対象とした大学が崩壊し、よりきめ細かな教育環境が期待されている。そのなかでも

- (a) 専門家養成
- (b) 教養教育
- (c) 社会貢献

は必須であろう。そのバランスは大学や学部の理念

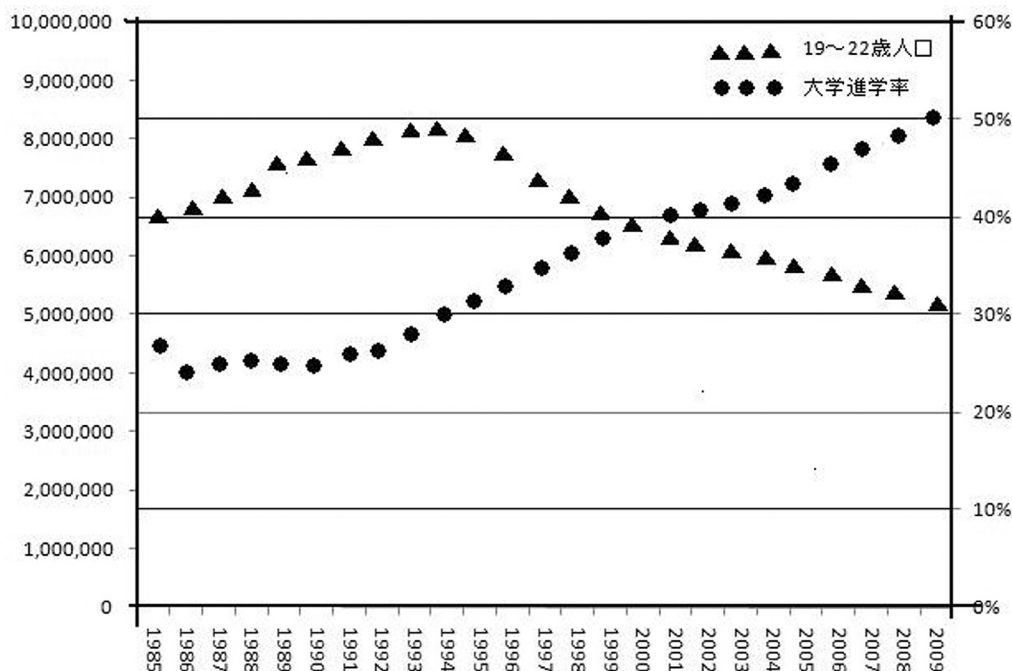


図3 大学進学率と19～22歳人口の推移 ([3]より引用)

や社会情勢により左右される。その中で数学はいかなる高等教育を目指すか？ (a)の専門家の養成は数学科の使命としてここでの話から外すとしても、(b)や(c)を考えたとき数学教育が単純に100年前からの道具を提供するだけでよいのだろうか？ 数学教育はより積極的に教養教育や社会貢献を求められているのである。他の分野が公開講座や産学連携など具体的な社会との接点を重視している中で数学が漫然と胡坐を掻いている訳にはいかない時代なのである。

#### 4 新たなスタンダードを求めて—2つの事例

大学における数学教育が大きな曲がり角に来ていることはだれもが認識している事実である。このような中で各大学では多くの試みがなされており、その中から新たなスタンダードとなる大学の数学教育が生まれることが期待されている。ここでは文系・理系の枠を越えた慶應義塾大学の湘南藤沢キャンパスのナレッジスキル教育と産学連携を目指す九州大

学のマス・フォア・インダストリ研究所を紹介する。

(1) 慶應義塾大学の湘南藤沢キャンパスでは理系・文系の枠を越えて問題発見とその解決を教育目標としている。したがってキャンパスで取り上げられている自然・社会・人文などの幅広い研究テーマに対応する数学教育が要求されている。これらを分析し、問題の発見およびその解決の手法を与えるのがナレッジスキルであり、数学の科目も数理科学としてこの中に位置づけられている。科目名には工夫を凝らしているが、「微積分学」「線形代数」「微分方程式」「複素解析」「フーリエ解析」あたりはきちんと取り入れられている。具体的な科目群の目的と科目は以下のとおりである。([4]より抜粋)

- A データ獲得：社会調査や環境調査、Web 調査などにより、実世界から生データを獲得する過程を学習する。生データとは、単に数値データだけに止まらず、マルチメディア・データや遺伝子配列データなども含む。



- B データ編集：獲得されたデータを使ったりサーチデザイン（研究全体のデザイン）とデータベース（データの集積基地）化の過程を学習する。データベース化は、それ以降のデータ処理の準備として不可欠なプロセスである。
- C データ分析：量的なデータあるいは質的なデータを対象としたデータ分析、およびその結果の解釈・評価を行うプロセスである。この処理プロセスには検索やデータマイニング手法を含む。
- D モデリング・シミュレーション：対象をモデル化し、そのシミュレーションの実行を通して、モデルの妥当性を検証するアプローチである。
- E 数理科学：以上の4個のグループに共通する数学的基礎を提供するのが狙いである。ナレッジスキルにとって本質的な、論理・解析・代数・確率の基礎を学び、連続量・離散量を数学的に使いこなす能力を養うことを狙いとしている。

学生は文系・理系の区別なく、自分の研究を遂行するのに必要なスキルを感じたときに、いつでも履修できる仕組みとなっている。もちろんいくつかの科目には前提科目を設定しているので、順序立てて履修することになる。この科目の中から2科目以上

の履修を卒業要件に課しているが、どこかで数学に接すれば容易にクリアできるので、履修の強制することによって数学嫌いを増やすことはない。

(2) 九州大学のマス・フォア・インダストリ研究所 (Institute of Mathematics for Industry) は数学者が産学連携を目指した世界的に見ても稀な研究施設である。今までの数学に対する考え方を大きく見直す機会を与えている。大学をとりまく社会の変化に数学者が迅速に対応した研究所であり、今後の発展が大いに期待されている。若山正人マス・フォア・インダストリ研究所長（基礎理論研究部門）の言葉によれば ([5])

『IMIの活動の基本は、多様な数学研究を基礎におく産業数学の研究の推進とその人材育成にあります。事実マス・フォア・インダストリ (MI) とは、未来の産業数学をも視野におく新しい研究領域です。本質的な研究は、いつかは役立つと信ずるに足る多くの例があるとおり、歴史は、顕在化した需要への対応のみでは、社会が真に求めている要請に応えることができないことを示しています。そのためIMIでは、数学を軸に産業界との共同研究を強力に推進する研究者をはじめ、応用・純粋数学の垣根を越え幅広い数学分野で活躍する専任教員を配置し、現代社会との接点も尊びながら基礎的研究に力

表 ナレッジスキル科目

(A) データ獲得	(B) データ編集	(C) データ分析	(D) モデリング・シミュレーション	(E) 数理科学
データ獲得法 資料検索法 質的調査法 インタビュー法 フィールドワーク法 Web 社会調査法	データベース概論 リサーチデザイン データベース構築法 経営統計データベース Web テキスト処理法	データ分析 データマイニング 多変量解析 1 多変量解析 2 多変量モデリング 時系列解析法 ベイズ統計 空間分析 空間モデリング ソシオコンテンツ分析法	モデリング・シミュレーション技法 オブジェクト指向モデリング シミュレーションデザイン	数理と社会 数学と論理 線形の理論 変化の理論 現象の理論 最適化の数理 複雑系の数理 複素積分の数理 不確実性と情報 情報数学 1 情報数学 2 検証技術の基礎

を注いでいきます。また、たとえば19世紀の偉大な先駆者たちの、理論研究とともに数値的計算を多く行っていた事実にも着目すべく、理論研究と数値的・計算的研究をともに重視し、さらに、決定論的な考察と統計的・確率論的手法を両翼に据えて、視野を広く保ちながら研究活動を進めてまいりたいと考えています。加えて、産業界・諸科学分野と数学との双方向の協働を可能にする開かれた場の構築を図るなど、着実な拠点づくりを目指し一步一步前進する所存です。さらに、国際連携の推進、とくに太平洋・東アジアにおいて産業数学振興に向けた連携をはかるなど、グローバルな視点からのマス・フォア・インダストリー活動を進めてまいります。』

研究所には数学テクノロジー先端研究部門、応用理論研究部門、基礎理論研究部門の3部門があり、さらに企業との共同研究を円滑に推進するために「連携推進・技術相談窓口」を設けている。セミナーや研究集会が積極的に開催されており、2011年度前期に開催された次のIMI Colloquiumからもその特徴がうかがえる。(I6)

1. 金融派生証券（デリバティブ）の評価モデルとリスク管理～その発展と今後の課題  
新長 義己（三菱UFJモルガン・スタンレー証券株式会社 市場商品統括グループ長）
2. 双対双線形ベクトル空間と暗号  
岡本 龍明氏（NTT情報流通プラットフォーム研究所【岡本特別研究室】）
3. 開かれた数学への熱い期待～化学産業の研究開発に因ってきた一研究者の思い～  
中村 振一郎（三菱化学フェロー・理化学研究所特別招聘研究員）

現在は研究所であるが、大学院や学部の学生への影響は大きい。ここでの成果は彼らの数学に対する考え方を大きく変え、とくに数学を学習することへの新しいモチベーションを誘発する。この流れから数学教育の新しいスタンダードが創造されることが

期待される。

## 5 新たな名著の可能性は

大学をとりまく環境が急速に変化する中で数学教育も積極的にその変化に対応していく必要がある。現状では多くの教員は教材の選択やその作成に苦勞している。2つの名著はその内容においては普遍性を保っているが、現代の学生への教科書としてはやはり古くなってしまった。実際に彼らが読破することはなかなか難しい。反面、昔にはなかったPCや数学ソフトが普及している。この時代にふさわしい名著が求められている。

グラフィックス機能やアニメーション機能などは数学の理解に大きく貢献できる。2変数関数の極値問題や微分方程式の解の挙動など、昔から数学者はありとあらゆる工夫をしてその理解を深めてきた。しかし数学ソフトによりリターン・キーを押せばたちどころにそのイメージが得られるようになった。教室の機材においても黒板に加え、プロジェクターや書画カメラの利用も可能である。また数学の演習の方法においても問題とその解説を基本にするも携帯端末を用いたより双方向的方法も可能である。100年前とは雲泥の差があるにも関わらず、なかなかその利点が活かされていない。

その一方で、キーポイントを押さえる参考書やマンガによる数学の教科書も多数出版されている。発行部数から言えば通常の数学の本をはるかに上回っているのではないだろうか？ この現象をいかに捉えるかもポイントである。いろいろな事由はあると思うが、結局のところ数学を安直に理解しようとすることには違いない。教育の基本は「分かる」ことを体験することであると述べたが、この安直な理解は異質であろう。しかし「分からない」よりは良いことも確かである。ではこの現象を肯定できるかというこの問題はそう簡単ではない。この問題の本質はたとえ時間があっても通常の教科書は読まないこと、なぜなら通常の教科書が読めないことである。現実に多くの大学生は高校の数学の教科書を読むことすらおぼつかないのである。

これだけの学力差がある大学にはもはや名著は期

待できない。強いて言えばそれぞれの範疇でその名著を考えるしかない。通常の数学の教科書やマンガ数学本の名著があってもよいのかもしれないが、昔の名著とは程遠い。このような学力差あるいは高校の教科書も読めない大学生がなぜ生まれてしまったのか、その答えは簡単で高校において継続的な数学の学習がなされていないからである。

## 6 数学高等教育の問題点

数学の高等教育についてとりとめもなく述べてきたが、理想の教育環境を作るためには、大学での数学教育の改善だけではとても無理である。近年、大学生の学力幅が拡大しかつ大学への進学目的も多様化している。一方、教員の立場からしても学術研究の高度化や競争原理の導入により数学教育へ多くの時間を割き振ることができない。要するに数学教育のあらゆる側面においてスタンダードがない時代なのである。このことは専門家を養成する数学科においても同じである。大学院生の学力や修士論文のレベルにおいて、昔のスタンダードは消滅しかかっている。「大学全入時代」の学生のスタンダードな学力はどのレベルなのか、理系学部でいえば「大学院全入時代」の院生のスタンダードな学力はどのレベルなのか、これらの問いに対して大学や大学院は明確な答えがないまま現状を受け入れているのが実情である。大学での数学の高等教育が学術研究の高度化、学習需要の多様化、社会の変化に的確に対応するためには、スタンダードな状況を設定する必要がある、場当たりの対応では到底に無理である。その切り札は大学入試なのだが、少子化のこの時代、その切り札が使えない。

となると高校での後期中等教育あたりからの数学教育の改革が望まれる。現行の高校の教科書は世界的に見ても素晴らしく、要点を的確に押さえ簡潔に必要事項がまとめられている。ところがこの高校の教科書が読めない大学生が多くいる。なぜならば高校で読んでいないからである。高校における教育の最大の問題点は、文系と理系と生徒を分けることである。高校の1, 2年生頃に、あなたは文系学部へ進学を希望しているので、数学はもう勉強しなくて

いいですね。と言いきってしまうのはいかがなものか？ 大学入試に関わらないことを教える時間が無い、このような姿勢ではせっかくの素晴らしい教科書が宝の持ち腐れである。数学の教育には継続が必須である。この文理に分ける教育姿勢が学力の格差を増長した。この広がった格差を大学で縮めることは容易なことではない。さしあたっての急務は「大学全入時代」のスタンダードな高校生をきちんと確立することが必須の教育改革ではないだろうか。

## 7 むすび

昔の高等数学の名著を今の大学生は読むことができない。もっと深刻なのは高校の数学の教科書も読むことができない大学生が大勢いることである。大学に入学する学生のスタンダードはどこにあるのか？ 大学入試制度を含めた教育改革は必須であり、マンガ数学本が名著となる時代は是非とも避けたいものである。

## 参考文献

- [1] ウラジミール・イワノビッチ・スミルノフ著、彌永昌吉・福原満洲雄・河田敬義・三村征雄・菅原正夫・吉田耕作監修「スミルノフ高等数学教程(全12巻)」、共立出版、1958年。
- [2] 高木貞治著「解析概論」、改訂第3版 軽装版、岩波書店、1983年。
- [3] 小樽商科大学教育開発センター 第36回「なぜ大学進学率が50%を超えたのか? —大学進学人口と大学数との関連—」、学報、第376号、(2010.8) 掲載。  
<<http://www.otaru-uc.ac.jp/hkyomu1/fdhome/colum/fd-c36.htm>>
- [4] SFC 講義案内、創造技法ナレッジスキル科目(2010年度)。  
<[http://vu8.sfc.keio.ac.jp/course2007/data/overview\\_data/2011/data\\_intro.html](http://vu8.sfc.keio.ac.jp/course2007/data/overview_data/2011/data_intro.html)>
- [5] IMI について 所長メッセージ。  
<<http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/pages/message.html>>
- [6] IMI Colloquium。  
<<http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/seminars/category/23>>
- [7] 我が国の高等教育の将来像(審議の概要)、中央教育審議会大学分科会(2004.9)。  
<[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/04091601.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/04091601.htm)>